●数学研究

理性思辨与数学构造
——超越数蕴含的数学思想方法简析

郭龙先，　何建琼
（昭通学院 数学与统计学院，　云南　昭通　657000）

摘要：18 世纪的数学家已经发现，并非所有的无理数都可以通过有理数的代数运算而得到. 19 世纪中叶，关于代数无理数与超越数的工作，使人们朝着更好地了解无理数的方向又前进了一步. 超越数的发现，使数学家们明白了它的范围和种类都比无理数丰富得多. 超越数与代数数理论的建立，彻底解决了困扰数学家两千多年的三大尺规作图难题.

关键词：代数数；　超越数；　尺规作图难题
中图分类号：O11　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：(2013)05-0016-05

代数的发展是和方程分不开的，狭义的代数学就是方程论. 19 世纪中叶，关于代数无理数与超越数的工作，使数学家们朝着更好地了解无理数的方向又前进了一步. 人们开始从代数方程的角度对实数进行划分：代数数和超越数. 所谓代数数，是指满足代数方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

（a_i 为有理数，且 $a_0 \neq 0$）的任何一个实数. 一个实数如果满足 n 次代数方程，但不满足低于 n 次的方程，就叫做 n 次代数数（对于复数，也可以类似地定义代数数和超越数，在复数域中，不是代数数的数皆为超越数. 除特别说明之外，本文只在实数范围内讨论超越数）. 代数数的概念是有理数的自然推广，任一有理数 p/q 必定是一次代数数，因为它满足方程 $qx - p = 0$. 反之，不可能满足任何整系数代数方程的数，则被称为超越数. 超越数都是无理数，但无理数却不一定是超越数. 例如$\sqrt{2}$ 是无理数，但它却能够满足方程 $x^2 - 2 = 0$，所以$\sqrt{2}$ 是二次代数数.

欧拉是最早意识到超越数与代数数之间具有本质差别的数学家，他在 1737 年证明了自然对数的底 e 及 e^2 均为无理数，并且猜测 e、π 为超越数，因为“它们超越了代数方法的能力”. 他还指出如果 a，b 为有理数，则 $\log_a b$ 不是有理数，就是超越数. 勒让德也曾猜测 π 不是有理系数多项式方程的根. 1761 年，德国数学家兰伯特证明了如果 x 是不为零的有理数，那么 e^x 和 $\tan x$ 都不能是有理数，他由此得出 π 是无理数的结论（因为 $\tan\pi/4 = 1$，故而 $\pi/4$ 和 π 都不能是有理数，否则将导致矛盾）.[1] 同时，他还证明了如果 a 为有理数，则 $\ln a$ 为无理数.

1　超越数——以有理数逼近无理数的必然产物

18 世纪时人们就已发现，并非所有的无理数都可以通过有理数的代数运算而得到. 法国数学家刘维尔开创了对超越数的研究，他发现无理代数数的有理数逼近值，其精度有一定的限度. 在研究以有理数逼近无理数的过程中，狄利克雷首先（1842 年）证明了：如果 a 是实无理数，那么不等式

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

有无穷多个整数解 . 1891 年赫尔维茨将上述不等式改进为

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2},$$

$\sqrt{5}$ 是保证不等式有效的最佳值，如果将其换成更

收稿日期：2013-03-20
基金项目：云南省教育厅高等学校教学改革研究项目（高等代数课程改革的理论与实践，云教高[2012]95 号）.
作者简介：郭龙先（1965—　），女，云南昭通人，教授，学士，主要从事数学教育、代数学思想史研究.

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

大的数，那么不等式就只存在有限对整数解(p,q).

1844年,刘维尔发现:如果p/q是一个n次代数无理数α的任一有理数近似值,则存在一个正数M,使

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|>\frac{M}{q^n},$$

这里p与q均为大于1的整数.这表明,对于n次代数无理数的任一个有理逼近p/q,其精度都达不到M/q^n.刘维尔定理也可以表述为:如果α是n次代数无理数,则当$m>n$时,使不等式

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{M}{q^n}$$

成立的整数解(p,q)只有有限对.1909年挪威数学家图埃证明条件$m>n$,可以改进为$m>n/2+1$;1921年西格尔给出了一个更强的结论,$m>2\sqrt{n}$;戴森与盖尔丰德各自独立地证明了$m>\sqrt{2n}$;最佳的结果是1955年英国数学家罗斯得到的,他证明了m确切下界是2,与n无关,即α为任一非有理代数数,则对任一$\delta>0$,适合不等式

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^{2+\delta}}$$

的有理整数解p/q只有有限个.华罗庚在《数论导引》一书中称赞该定理为“至善者”[2].

罗斯定理表明,所有的代数无理数用有理数来逼近,都不能达到很高的精度,除非用以逼近的分数的分母很大.反之,如果无理数α对于不等式

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^m}$$

的每一个正整数m都有解p/q,则α是超越数.因为不难造出这样的无理数α,使得不等式对于任意的m都有无穷多个整数解(p,q),由此可推出存在着不是代数数的无理数.

无理数和超越数是用“非”或“不是”这样的字眼来定义的,虽然定义了超越数的概念,但仍不清楚它们到底具有什么样的特性.在法国数学家刘维尔之前,没有任何一个数学家知道具体的超越数究竟为何物?1844年刘维尔证明了下述形式的任何一个数都是超越数:

$$\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^{2!}}+\frac{a_3}{10^{3!}}+\cdots \qquad (1)$$

其中a_i可以是从0到9的任意整数(但不能全部取零).如果令a_i的取值全部为1,则得到无限不循环小数:$\alpha=0.110001000000000000000001000\cdots$形如$\alpha$的数称为“刘维尔数”.容易证明$\alpha=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^{n!}}$是一个超越数.令

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{10^{2!}}+\frac{1}{10^{3!}}+\cdots+\frac{1}{10^{n!}}=\frac{p}{q},q=10^{n!}.$$

则

$$0<\alpha-\frac{p}{q}=\frac{1}{10^{(n+1!)}}+\cdots<\frac{2}{10^{(n+1)!}}=\frac{2}{q^{n+1}},$$

n可以为任意自然数,由刘维尔定理可知α不是代数数.同理可证,凡是形如$\sum_{n=1}^{\infty}g^{-n!}$的刘维尔数均为超越数($g=2,3,\cdots,n$为正整数).可见超越数与代数无理数不同之处在于,若用有理数p/q作为它们的近似值,代数无理数虽然有无穷多个有理近似值,但只能达到$1/q^2$的精确值,若要达到更高的精度如$1/q^3$就很困难了(只有有限多个),超越数的有理逼近值不仅有无穷多个,而且能精确到$1/q^m$(m可以为任意自然数).

2　理性思辨与数学构造——超越数存在的二重证据

继刘维尔之后,许多数学家都致力于对超越数的研究.关于e和π究竟是代数数还是超越数的问题,曾经使数学家们为之着迷.1873年,法国数学家埃尔米特证明了自然对数底e的超越性后,在给朋友的信中写到:

> 我不敢去试着证明π的超越性.如果其他人承担这项工作,对于他们的成功没有比我再高兴的人了,但请相信我,我亲爱的朋友,这决不会不使他们花去一些力气.[3]

1882年,德国数学家林德曼证明了圆周率π也是一个超越数,使人们对超越数的认识更为清楚.

刘维尔构造出超越数二十多年后,康托尔凭借敏锐的洞察力,断定任一实轴段上的实数集减去其上的所有代数数集后所得到的“余集(亦即超越数集)”是不可数的.为此,他首先证明了所有代数数的集合是可数的,即代数数的个数与自然数一样多.对每个形如:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \qquad (2)$$

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

的整系数 n 次方程，指定正整数 $h = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}| + |a_n| + n$ 为它的"高". 对于每个固定值 h，仅有有限个形如(2)的方程的高为 h. 这些方程中的每一个至多有 n 个不同的根，因此高为 h 的方程，只能有有限个代数数. 根据每个方程"高"的大小，把所有代数数排成一个序列：开始是那些高为 1 的，然后取高为 2 的，等等.

康托尔根据实数集是不可数的结论，进一步证明了复数集也是不可数的. 因此必定有复数不是代数数，超越数不仅存在，而且多到不可数！这是关于超越数的存在性的第一个非构造证明，但他并没有构造出一个具体的超越数就断言它们是存在的！这样的存在性证明当然不能使人具体知道一个超越数，更不用说对其计算了. 因此引起了诸如克罗内克、庞加莱、布劳威尔等反对者更强烈的攻击. 尽管如此，数学发展的历史最终还是承认康托尔是正确的.

数学中的许多存在性证明都是用非构造方法实现的. 例如，高斯曾经证明过每个实系数或复系数 n 次多项式方程至少有一个根，但是该证明并没有指出怎样计算这个根. 相对于康托尔的证明，刘维尔的方法则算是构造性的了，他实际地构造出一个对象并给予证明. 20 世纪早期的一些数学家，如鲍莱尔、贝尔和勒贝格认为纯粹的存在性证明是没有价值的，存在性证明应使数学家们能按想要达到的精度来计算存在量，他们称这样的证明为构造性证明. 无论如何，存在性和构造性证明都是数学中常用的方法. 一般情况下，我们考虑具体的对象比抽象的对象要容易得多，在数学中，有时却恰恰相反，证明某个具体的数是超越数，远比非构造性地证明超越数的存在更为困难和复杂. 19 世纪超越数论取得的最高成就是林德曼 — 魏尔斯特拉斯定理：如果 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是两两不同的代数数；$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是非零代数数，则

$$\beta_1 e^{\alpha_1} + \beta_2 e^{\alpha_2} + \cdots + \beta_n e^{\alpha_n} \neq 0 \qquad (3)$$

由此可以导出，如果 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 在无理数集中线性无关，则 $e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, \cdots, e^{\alpha_n}$ 代数无关(即它们不适合任一其系数为有理数的多项式方程). 由(3)可知，如果 α 是非零代数数，则 $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$ 都是超越数；如果 α 是不等于 0 和 1 的代数数，则自然对数 $\ln\alpha$ 是超越数.

时至今日，要判断一个数是否为超越数依然很困难. 希尔伯特 1900 年在巴黎国际数学家大会上所作的关于"数学问题"的著名演讲中，就提到了某些数的无理性与超越性问题(第 7 问题). 他说道：

> 埃尔米特关于指数函数的算术定律和林德曼对它们的推广，肯定会受到各代数学家们的赞赏. 这就立刻提出了这样的任务：沿着已经开辟的途径深入前进，正如霍尔维茨在两篇有意义的论文《论某些超越数的算术性质》中所做的那样. 因此，我想概要地提出一类问题，按照我的看法，是应当马上就着手解决的. 某些在分析中很重要的特殊的超越函数，对某些代数变数取代数值，这个事实在我看来是特别令人注意和值得深入研究的. 的确，一般说来，我们希望超越函数即使对代数变数也将取超越值；大家已经知道，存在着一类整超越函数，它们甚至对所有代数变数都取代数值，虽然如此，我们仍然认为，有一种超越函数，例如指数函数 $e^{i\pi z}$，它对一切有理变数 z 显然取代数值，另一方面却很可能对变数 z 的无理代数值恒取超越值. 我们也可以给这命题以如下的几何形式：
>
> 如果在一等腰三角形中，底角与顶角之比是代数数但非有理数，则底与腰之比恒为超越数.
>
> 虽然这个命题很简单并且与埃尔米特和林德曼已经解决的问题有相似之处，但我认为这定理的证明是非常困难的；下述命题的证明也是如此：
>
> 对于代数底数 α 和无理代数指数 β，表达式 α^β，例如 $2^{\sqrt{2}}$ 或 $e^\pi = i^{-2i}$，表示一超越数或至少是一无理数.
>
> 毫无疑问，这个问题以及类似问题的解决，对于探讨特殊的无理数和超越数的性质，必定会带来新的方法和新的见解.[4]

俄国数学家 *A.O.* 盖尔丰德于 1929 年证明了：若 α 是不等于 0 和 1 的代数数，β 是二次复代数数，则 α^β 是超越数，特别地，$e^\pi = (-1)^{-i}$ 是超越数. 库兹明于 1930 年把这个结果推广到 β 是二次实代数数的情形，则 $2^{\sqrt{2}}$ 是超越数. 1934 年，盖尔丰德和施奈德独立地对希尔伯特第 7 问题作出了肯定回答，即对于代数底数 α 和无理代数指数 β，表达式 α^β 是超越数，这就是著名的盖尔丰德 — 施奈德定理. 由此可知，若 α 是正有理数，则常用对数 $lg\alpha$ 不是有理数便是超越数(假设 $lg\alpha$ 为代数无理数，则 $10^{\lg\alpha}$ 为超越数，根据对数恒等式 $10^{\lg\alpha} = \alpha$，与已知前提 α 为正有理数矛盾). 除了上述结果外，我们还可以证明：

$$\sin 1, \log 2, \frac{\log 3}{\log 2}$$

是超越数. 但至今无人知道 π^π，$e + \pi$ 是代数数或

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

超越数，而判别实数为有理数或为无理数的有些问题也同样是难题.欧拉常数：

$$r=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n)$$

是有理数还是无理数？如果是无理数，则它是代数数，还是超越数？这一问题至今尚未解决.

3　三大几何难题的终结——尺规作图的代数学解析

超越数与代数数理论的建立，彻底解决了困扰数学家两千多年的倍立方、三等分角和化圆为方这三大尺规作图难题，现在我们知道它们是一类"不可能"问题.关于尺规作图问题，代数学的研究表明：用直尺和圆规可以作出的线段，其长度只能是一次代数数，2次代数数，4次代数数，……一般地，是 2^n 次代数数(n 为非负整数).所谓"倍立方体"的问题，实质上就是要作一长度等于$\sqrt[3]{2}$的线段.数学家已经证明$\sqrt[3]{2}$是三次代数数，而非二次代数数，因为$\sqrt[3]{2}$不是任何一个二次整系数方程的根，所以这是一个尺规作图的不可能问题.

虽然用尺规三等分45°，90°等特殊角是可能的，但所谓"三等分角"的问题，是指用尺规三等分一个任意角.因此只要指出存在一个不能用尺规三等分的角，即可得到否定的结论.例如，三等分一个60°的角，与其等价的代数命题是考虑如何求出cos20°的值.将 $x=20^\circ$ 代入三角恒等式 $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$，得

$$4\cos^3 20^\circ-3\cos 20^\circ-\frac{1}{2}=0\ ,$$

令 $y=\cos 20^\circ$，得三次方程

$$8y^3-6y-1=0.$$

方程的一个正实根即为cos20°，但是可以证明该值不满足任何一个一次或二次整系数代数方程，因此cos20°是一个三次代数数，故不能用尺规作出60°的三等分角.

化圆为方的问题和其他两个问题不同之处在于，它完全不能用代数公式来表达.π 的超越性的证明，终于使人们明白了"化圆为方"是不可能的.事实上，设圆的半径为1，则圆面积为 π，于是化圆为方问题就相当于求作一线段 l，使它的长度等于$\sqrt{\pi}$.因为 π 为超越数，所以$\sqrt{\pi}$也是超越数.用尺规只能作出 2^n 次代数数，化圆为方也是不可能的.

所谓的"三大几何难题"，其困难之处并不在于问题本身，一切障碍都源于对作图工具严格限制的古典传统，希腊人对于几何作图问题只允许使用直尺和圆规.一旦除去限制，不可能性就消失了，如果放宽作图工具的限制，三大几何难题都是可以解决的.例如古希腊数学家、天文学家希波克拉图首先将倍立方问题归结为求两条已知线段的比例中项问题.设两条已知线段为 a 与 $2a$，其比例中项为 x,y，即 $a:x=x:y=y:2a$，则有 $x^3=2a^3$ 或 $y^3=2x^3$.许多希腊数学家沿着这一方向解决了倍立方问题.例如毕达哥拉斯学派的阿尔希塔斯用圆柱、圆环和圆锥曲面相交的方法求出任意两条线段的比例中项；门奈赫莫斯利用圆锥截线求出比例中项；尼科米迪斯利用蚌线求解等等.其中较为简便实用的方法是用直角尺求得比例中项，后人称之为柏拉图方法.倍立方体问题的研究促进了圆锥曲线理论的建立和发展.

对于化圆为方的问题，同样有过多种解决办法，希皮亚斯曾经构造割圆曲线解决三等分角的问题，后来发现也能用于化圆为方；阿基米得采用穷竭法以及用螺线的性质化圆为方等等.其中较为巧妙的方法是文艺复兴时期的著名学者达·芬奇设计的：用一个底与已知圆相等、高为已知圆半径之半的圆柱在平面上滚动一周，然后将所得矩形化为等积的正方形即可.

希皮亚斯构造的割圆曲线不仅可以三等分角，而且可以任意等分角.尼科米迪斯发现的蚌线也能解决三等分角问题.阿基米得利用只有一点标记的直尺和圆规，巧妙地解决了这一问题.此外，帕波斯曾对两种圆锥曲线解三等分角问题的方法做了证明，并推广了已有的结果.还有许多数学家从实用角度出发创立了一些近似作图法，而且可以求到任意精确值.三等分角问题表述简单但道理深邃，对它的深入研究导致许多作图方法的发现和作图工具的发明.

可见，对几何作图的"可能"与"不可能"这两个术语并无绝对的意义，"不可能性"是某种限制所产生的结果，如果所有的作图工具都像圆规、直尺一样被承认，那么所谓"不可解"问题与"可解"的问题之间的界限必将消失在"一切问题"的领域之中.

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

4　结语

发现超越数之后,数学家们最终明白了它的范围和种类都比无理数丰富得多,更让人惊奇的是像 π 以及 e 这样重要的基本常数竟然是超越数!耗费了几十代数学家心血才发展起来的强大的代数方法,在超越数面前,也如同两千年前有理算术遭遇到无理数一样无能为力. 丹齐克指出:"代数和有理算术一样,只处理有限算法."对此,他说道:

古往今来,把数建立在比较稳固的基础上的希望,都被无限这块暗礁所触毁. 但是,要正式认可无限算法,要承认这种奇特的无理怪物和有理数处于同等地位,对于十九世纪的严格派来说,正如对于古希腊的严格派一样,都是一件使人讨厌的事.[5]

在毕达哥拉斯学派"万物皆数"之信条因无理数的发现而被摧毁之后,代数学家企图再一次用数来穷尽天下万物的努力,随着超越数的出现又遭到了挫折,用欧拉的话来说,它们"超越了代数方法的能力之外".

参考文献:

[1]M·克莱因. 古今数学思想(第 2 册)[M]. 北京大学数学系数学史翻译组,译. 上海:上海科技出版社,1979:189.
[2]华罗庚. 数论导引[M]. 北京:科学出版社,1975:533.
[3]M·克莱因. 古今数学思想(第 4 册)[M]. 北京大学数学系数学史翻译组,译. 上海:上海科技出版社,1981:44.
[4]邓东皋,孙小礼. 数学与文化[M]. 北京:北京大学出版社,1990:238.
[5]丹齐克. 数·科学的语言[M]. 苏仲湘,译. 北京:商务印书馆,1985:98.

Rational Thoughts and Mathematical Structure
——A Brief Analysis of Mathematics Thinking Method Implied in Transcendental Number

GUO Long-xian, HE Jian-qiong
(School of Mathematics and Statistics, Zhaotong University, Zhaotong 657000, China)

Abstract: It was found out by some mathematicians in 18th century that not all irrational numbers can be turned out through algebraic operation of rational numbers. In the mid-1 800s, the study concerning irrational number and transcendental number was a step closer to better understanding of irrational number. Upon being discovered, transcendental number has been attracting the attention of mathematicians with it's wider range and more sorts off than irrational number. The discovery of transcendental number, along with the establishment of the algebra theory, offers a thorough solution to three difficult problems of compass and straightedge construction, which have haunted all mathematicians for more than 2 000 years.

Key words: algebraic number; transcendental number; difficult problems of compass and straightedge construction

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net