代数数与超越数

王兴东　(江苏南通师范学校　226006)

1　什么是代数数

纪元前 600 年左右, 古希腊的毕达哥拉斯(Pythagoras)学派证明了正方形的对角线与其边长之间的比不能用一个分数表示, 即不可公度性, 这是历史上第一次发现无理数. 无理数究竟是些什么样的数呢?因为第一个无理数可以从代数方程 $x^2-2=0$ 中得到, 这就引导人们进一步考察一般的代数方程及研究它们的根.

一般地, 我们有如下的定义: 若数 $\zeta(\zeta\in R)$ 满足有理系数代数方程

$x_n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$

则 ζ 叫做一个代数数. 若 ζ 所满足的最低次的代数方程的次数是n, 则 ζ 叫做n 次代数数.

显然, 对于任何有理数$\frac{b}{a}(a, b\in R, a\neq 0)$都是一次方程 $ax-b=0$ 的根, 所以有理数都是代数数, 当然, 形如$\sqrt[n]{a}(a\in R)$, $a+bi(a, b\in R)$的数也都是代数数.

代数数有个重要性质: 由所有代数数组成的集合对于普通的加减乘除运算来说都是封闭的, 也就意味着代数数集合构成了一个域. 代数数域可以看作由有理数域扩张所得到的, 这样就自然产生了一个新的问题: 代数数域是否已经包含了所有的无理数?有没有超越于代数数之外的无理数存在呢?

2. 超越数的研究历程

如果把不是代数数的复数叫做超越数, 是否存在超越数?早在 1744 年, 瑞士数学家欧拉(Euler 1703—1783)已经预见了它的存在. 从19 世纪中叶起, 人们才逐步揭开了超越数的神秘面纱, 并有过许多重大突破, 现择要列举如下:

2.1　1851 年法国数学家刘维尔(J. Liouville 1809— 1882)得到了代数数的一个有理逼近性质, 即如果 ζ 是一实n 次代数数, 则只存在有限个有理数$\frac{p}{q}$ 满足$\left|\zeta-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{q^{n+1}}$ $(q>0)$. 该性质给出了实代数数所必须满足的一个必要条件, 凡不满足这一条件的实数必定不是代数数, 刘维尔根据这一原理构造了第一个超越数, 即 $\zeta=\sum\limits_{k=1}^{\infty}10^{-k!}$.

2.2　继刘维尔之后, 1873年法国数学家厄尔米特(C.Hermite1822 — 1901)应用微积分的工具, 证明了数 e 为一超越数. 他的主要想法如下:

首先引进了一个函数

$F(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}f^{(i)}(x)$①, 其中 $f(x)$为 n 次多项式.

则利用分部积分法不难得出

$e^b\int_0^b f(x)e^{-x}dx=e^bF(0)-F(b)$, 记为(1).

又反设 e 满足m 次整系数不可约方程

$\sum\limits_{i=0}^{m}a_ix^i=0$, 为了导出矛盾, 选择

$f(x)=\frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}\prod\limits_{i=0}^{m}(x-i)^p$, 其中 p 为素数, $f(x)$的次数 $n=mp+p-1$. 将所选的 $f(x)$代入恒等式(1), 并令 $b=i(i=0, 1, \cdots, m)$, 再在(1)两端同乘以 a_i, 然后按 i 迭加, 得:

$\sum\limits_{i=0}^{m}a_ie^i\int_0^i f(x)e^{-x}dx=-\sum\limits_{i=0}^{m}a_iF(i)-a_0F(0)$, 记为(2). 接下来可以证明当素数 p 选得足够大, 有下列三点事实:

1)$F(i)$是可被 p 整除的整数$(i=1, 2, \cdots, m)$;

2)$F(0)$是一个不能被 p 整除的整数, 从而推知(2)的右边为一非零整数;

3)(2)的左边绝对值小于 1, 从而导致矛盾.

具体证明略.

2.3　1874 年德国年轻数学家康托(Cantor 1845 — 1918)发表了题为《关于一切实代数数的一个性质》的论文, 证明了所有代数数组成一个可

①$f^{(i)}(x)$表示 $f(x)$的 i 阶导数.

数集,即代数数集可以与自然数集之间建立一一对应的关系.同时他又证明了全体实数集是一个不能与可数集建立一一对应关系的无限集,由此立即推出实数集中一定存在超越数,而全体实数是不可数的,这也说明了几乎所有的实数都是超越数!

下面我们来了解关于"代数数集合是可数集"的一个简单证明:定义 $N = n + \sum_{i=0}^{n} |a_i|$ 为整系数不可约 n 次多项式 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ 的指标,于是,任意一个整系数不可约 n 次多项式都对应有唯一的一个指标 N,反之,以自然数 $N(N \geqslant 2)$ 为指标的不可约的多项式的个数是有限的,而每个不可约多项式都包含有限个根,由代数数的定义知道,这些根都是代数数,于是每个指标 N 都对应有限个代数数.现在我们历数所有的指标 $N = 2, 3, 4, \cdots$,而对于每一 N,将其对应的代数数作一个排列,这样便得到一个在所有指标下代数数的总排列,这个总排列显然穷尽了所有的代数数,因此代数数集合是可数集.

2.4　1882 年德国数学家林德曼(F. Lindemann 1852－1939)在厄尔米特证明了 e 为超越数的基础上,进一步推广他的方法,证明了 π 的超越性,详细证明见参考文献[1].

π 的超越性的证明,因为直接关系到古典几何学的三大难题的最终解决,从而在当时受到了整个数学界的关注,成为近代数学史上的一件大事.所谓古典几何学的三大难题,是指不能用圆规直尺通过有限步骤解决下述作图问题:

1)二倍立方体;

2)三等分任意角;

3)化圆为方.

在二倍立方体问题中,假使已知立方体的边长为 1,要求作的立方体边长为 x,则 x 满足 $x^3 - 2 = 0$,但是 $x^3 - 2$ 是有理数域上的不可约多项式②,因此 x 是一个三项代数数.而有限次地使用直尺圆规,只能作出已知线段的有理数倍或二次代数数倍或 2^k 次代数数倍,所以二倍立方体问题无解.在三等分任意角问题中,我们只需证明三等分 60° 角不可能,而三等分 60° 角的问题等价于作出 $x = \cos 20^\circ$ 的边长,由三倍角公式 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ 即知 x 是方程 $\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x$ 的根,但是 $4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$ 是有理数域上的不可约多项式,因此 $\cos 20^\circ$ 也是一个三次代数数,不能用尺规作出,所以三等分任意角也是无解的.

在化圆为方问题中,取圆的半径为 1,则面积为 π,又设正方形的边长为 x,那么 $x^2 = \pi$,即 $x = \sqrt{\pi}$.由 π 是超越数易知,$\sqrt{\pi}$ 也为超越数③,所以 $\sqrt{\pi}$ 是不能用圆规直尺通过有限步骤作出的,从而化圆为方问题无解.

2.5　继厄尔米特和林德曼的工作之后,人们自然提出了这样的问题:对于一般的三角函数、反三角函数、对数函数和指数函数而言,当自变量取值为代数数时,其函数值是否为超越数?1895 年,德国数学家维尔斯特拉斯(Weierstrass 1815－1897)证明了下述推广的林德曼定理,常称为 Lindemann－Weierstrass 定理,回答了上面提出的问题.这个有名的定理可以叙述为:若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是互不相等的代数数,则 $e^{a_1}, e^{a_2}, \cdots, e^{a_n}$ 在代数数域上是线性无关的.根据该定理,不难得到:

1)当 a 为非零代数数时,e^a, $\sin a$, $\cos a$, $\tan a$, $\operatorname{sh} a$, $\operatorname{ch} a$, $\operatorname{th} a$ 等都是超越数;

2)当 a 为非 0 和 1 的代数数时,上述函数的反函数值也都是超越数.

下面仅对 $\cos a$ 进行说明,假若 $\cos a = x$ 是代数数,则由 $\frac{1}{2}e^{ia} + \frac{1}{2}e^{-ia} - xe^0 = 0$ 即得 e^{ia}, e^{-ia} 与 e^0 在代数数域上线性相关,这与 Lindemann－Weierstrass 定理相矛盾!

2.6　1900 年,德国数学家希尔伯特(D. Hilbert 1862－1943)在巴黎举行的国际数学家代表大会上,提出了著名的 23 个研究课题.其中第七个问题是:α, β 为代数数,$\alpha \neq 0, 1$, β 不为实有

② 可以用爱森斯坦不可约准则加以判别.

③ 如果 $\sqrt{\pi}$ 为代数数,那么根据所有代数数组成的集合对于普通的加减乘除运算来说都是封闭的这一性质得:$\pi = \sqrt{\pi} \times \sqrt{\pi}$ 也是代数数,而这与 π 的超越性相矛盾!

理数，问 α^{β} 是否为超越数？如 $2^{\sqrt{2}}$，$(-1)^{-i}=e^{\pi}$④ 等是否为超越数？希尔伯特当时认为这个问题比费尔马（P.Fermat 1601－1665）猜想⑤ 还要困难，但在 1934 年前苏联的盖尔范德（ЕЛ ГЕЛЬФОНД 1913 ～）与德国数学家施奈德（T.Schneider）独立地给出了希尔伯特第七个问题的肯定回答，同时回答了 $2^{\sqrt{2}}$、e^{π} 都是超越数，详细证明参考文献[1]．在上世纪六、七十年代，英国数学家 A.Baker 又进一步推广了上述结论．

在代数数和超越数的理论中，还有许多问题有待进一步的探索，现在人们还不清楚 α^{π}，α^{e}，π^{e} 及 Euler 常数 $r=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln n\right)$ 之中哪些是超越数？甚至连 r 是否为无理数也不清楚．

参考文献

1　华罗庚．数论导引．北京：科学出版社，1957

2　M．克莱因．古今数学思想．上海：上海科学技术出版社，1980

3　袁小明．数学思想史导论．南宁：广西教育出版社，1991

④ 根据复变函数关于指数与对数的定义有：$(-1)^{-i}=e^{-i\ln(-1)}=e^{-i[i\arg(-1)]}=e^{\pi}$

⑤　　年由英国数学家安德鲁　怀尔斯解决